На правах рукописи

ТРЕГУБОВА (СУЛЕЙМАНОВА)
АЛЬБИНА ХАКИМЬЯНОВНА

Задача Дирихле и видоизмененные задачи для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Казань – 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа Стерлитамакской государственной педагогической академии и в лаборатории дифференциальных уравнений Стерлитамакского филиала АН РБ

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, чл.-корр. АН РБ, профессор Сабитов Камиль Басирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Мухлисов Фоат Габдуллович
	доктор физико-математических наук, профессор Пулькина Людмила Степановна
Ведущая организация:	Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Защита состоится 24 декабря 2009 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете по адресу: г. Казань, ул. Профессора М.Т.Нужина, дом 1/37, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Н.И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан __ ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кан. физ.-мат. наук, доцент Е.К.Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В работе рассматриваются задача Дирихле и видоизмененные задачи для уравнений смешанного типа второго рода.

Начиная с известных работ Ф. Трикоми и С. Геллерстедта, систематическое изучение краевых задач для уравнений смешанного типа проводилось в работах Ф.И. Франкля, К.И. Бабенко, А.В. Бицадзе, Т.Д. Джураева, В.Ф. Волкодавова, С.П. Пулькина, М.М. Смирнова, М.С. Салахитдинова, В.И. Жегалова, А.М. Нахушева, Е.И. Моисеева, К.Б. Сабитова, А.П. Солдатова и других математиков.

Следует отметить, что подавляющая часть работ по уравнениям смешанного типа относится к исследованию краевых задач смешанного типа с нехарактеристическим вырождением. Краевые задачи для уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением изучены сравнительно мало.

Первые исследования по уравнениям смешанного типа с характеристическим вырождением принадлежат И.Л.Каролю. Его исследования посвящены выяснению корректной постановки задачи Трикоми для двух модельных уравнений:

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot |y|^m u_{yy} u = 0, \quad m > 0, \tag{1}$$

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + au_y = 0, \;\; a = const. \tag{2}$$

Пусть D – область плоскости XOY, ограниченная простой жордановой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$, и характеристиками OC и AC рассматриваемого уравнения, расположенными в полуплоскости $y > 0$. Обозначим $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Для уравнения (1) И.Л.Каролем рассмотрена задачи Трикоми (задача Т): найти функцию $u(x, y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $D_+ \cup D_-$ и принимающие заданные непрерывные значения на кривой Γ и характеристике OC. Он доказал однозначную разрешимость задачи T при $0 < m < 1$ в случае, когда кривая Γ совпадает с "нормальной"кривой $x(1-x) = 4y^{2-m}/(2-m)^2$. Но в общем случае, то есть для произвольной кривой Γ, доказательство единственности решения задачи T и его существования оставалось открытым. К.Б. Сабитов приводит доказательство единственности решения задачи T для любой кривой Γ из класса Ляпунова при $0 < m < 1$. Им показано, что задача Трикоми для уравнения (1) при $m \geq 2$ поставлена некорректно. В связи с этим он исследовал задачу Трикоми для уравнения $x^m u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} = 0$ при всех $m > 0$.

И.Л. Кароль для уравнения (2) в области D при $0 < a < 1$ изучил задачу Трикоми с весовым условием склеивания

$$\lim_{y \to 0-0} (-y)^a u_y = k \lim_{y \to 0+0} y^a u_y, 0 < x < 1,$$

где $k = -1$ при $0 < a < 1/2$, $k = 1$ при $1/2 < a < 1$.

Задача T для уравнения (2) при $a < 0$ становится корректно поставленной, если условия склеивания ввести по-иному. С.С. Исамухамедов, следуя С.А. Терсенову, для уравнения (2) в облсти D при $a = -n + a_0$, $1/2 < a_0 < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, поставил задачу T со следующими условиями склеивания:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$\lim_{y \to +0} y^a [u_y + A_n^+(u)] = (-1)^k \lim_{y \to -0} (-y)^a \frac{\partial}{\partial y} [u - A_n^-(\tau)] = \nu(x), 0 < x < 1,$$

где

$$A_n^- = \sum_{k=0}^{n} N_k (-y)^k \int_0^1 \tau^{2k}(z)(t(1-t))^{k+a_0-\frac{3}{2}} dt,$$

$$A_n^+ = \sum_{k=1}^{n} M_k y^{k-1} \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}, \quad z = x - 2\sqrt{-y}(1-2t),$$

$N_k(k = \overline{0, n})$, $M_k(k = \overline{1, n})$ – определенные постоянные.

Единственность решения этой задачи доказана методом экстремума, а существование для случая, когда кривая $\Gamma \equiv \Gamma_0$ – методом интегральных уравнений.

Хайруллин Р.С. для уравнения (2) в случае $a \leq -1/2$ в смешанной области, ограниченной нормальным контуром Γ_0 и двумя характеристиками, доказал однозначную разрешимость задачи Трикоми методом интегральных уравнений. В случае общей области, ограниченной при $y > 0$

произвольной кривой Г из класса Ляпунова и двумя характеристиками уравнения (2), им показана фредгольмовость задачи Трикоми.

Интерес к задаче Дирихле для уравнения смешанного типа возник после известных работ Ф.И.Франкля, в которых впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой динамики сводятся к этой задаче. Так, если рассматривать задачу перехода через звуковой барьер установившихся двумерных безвихревых течений идеального газа в соплах, когда сверхзвуковые зоны примыкают к стенкам сопла вблизи минимального сечения, то она сводится к задаче Дирихле для уравнений смешанного типа.

На некорректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева: $u_{xx}+(sgny)u_{yy}=0$ в смешанной области, гиперболическая часть γ границы которой лежит в характеристическом треугольнике $0\leq x+y<x-y\leq 1$, впервые обратил внимание А.В Бицадзе. Причем некорректность задачи Дирихле не зависит от малости меры области, заключенный между γ и $y=0$. Результат А.В Бицадзе с необходимостью поставил вопрос поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной.

Б.В. Шабат исследовал задачу Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в области $y>-h,\quad h>0$, и области, гиперболическая часть которой лежит целиком внутри характеристического треугольника, построенного на отрезке действительной оси $[0,1]$.

В работах Н.Н. Вахания и D.R. Connon доказана корректность задачи Дирихле для уравнения Лаврентьева–Бицадзе в прямоугольных областях, обладающих специальными свойствами.

В монографии М.М. Хачева рассмотрена задача Дирихле для уравнения

$$L(u)\equiv u_{xx}+(sgny)[|y|^m u_{yy}+a|y|^{m-1}u_y+b|y|^{m-2}u]=0,\quad 0<m<2,$$

со следующими условиями сопряжения:

$$\lim_{y\to+0} y^{-p_2}u=\lim_{y\to-0}(-y)^{-p_2}u,$$

$$\lim_{y\to+0}[y^{1-p_1}u_y - p_2 y^{-p_1}u] = \lim_{y\to-0}[(-y)^{1-p_1}u_y + p_2(-y)^{-p_1}u],$$

где

$$2p_1 = 1 - a + \sqrt{(a-1)^2 - 4b}, \quad 2p_2 = 1 - a - \sqrt{(a-1)^2 - 4b},$$

a, b – постоянные, подчиненные определенным условиям.

В работе Р.И.Сохадзе[1] для уравнения (2) при $0 < a < 1$ исследуется вопрос о существовании хотя бы одного решения задачи Дирихле в прямоугольной области D при условии

$$\exp\left(- \frac{2\sin(1-a)\pi}{\pi} \int \frac{dk}{kJ_{1-a}(2\pi k\sqrt{\alpha})J_{a-1}(2\pi k)\sqrt{\alpha}}\right) \neq$$
$$\neq -\exp\left(- \frac{2\sin(1-a)\pi}{\pi} \int \frac{dk}{kI_{1-a}(2\pi k\sqrt{\beta})I_{a-1}(2\pi k)\sqrt{\beta}}\right),$$

где $J_{1-a}(z)$ и $I_{1-a}(z)$– функции Бесселя первого рода порядка $1-a$ с действительными и чисто мнимыми аргументами соответственно. В следующей работе Р.И.Сохадзе[2] для уравнения (2) при $a > 1$, где a – не целое число, рассмотрена задача Дирихле со следующими условиями сопряжения:

$$\lim_{y\to 0+0} y^{a-1}u(x,y) = \lim_{y\to 0-0}(-y)^{a-1}u(x,y), \quad 0 \leq x \leq 1;$$
$$\lim_{y\to 0+0} y^{a}u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-0}(-y)^{a}u_y(x,y), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Методом разделения переменных построены частные решения уравнения (2) для указанных a и решение задач формально построено в виде суммы ряда Фурье. В этих работах отсутствуют четкие доказательства единственности решения поставленных задач и не приводятся обоснование сходимости рядов Фурье.

В работах А.П. Солдатова доказаны теоремы существования и единственности решения задач типа Дирихле для уравнения Лаврентьева - Бицадзе в смешанной области, ограниченной при $y > 0$ и $y < 0$ соответственно гладкими дугами с общими концами в точках $(0,0)$ и $(0,1)$, при этом дуга при $y < 0$ лежит внутри характеристического треугольника.

---

[1] Сохадзе Р.С. О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямугольнике //Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – №1. – С. 127 – 133.

[2] Сохадзе Р.С. Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с весовыми условиями склеивания вдоль линии параболического вырождения //Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – №1. – С. 150 – 156.

Нахушев А.М. установил единственность решения задачи Дирихле для уравнений смешанного типа первого рода в цилиндрической области.

В работах Сабитова К.Б. исследована задача Дирихле для вырождающегося уравнения смешанного типа первого рода

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u_{xx} + u_{yy} - b^2 \operatorname{sgn} y \cdot |y|^m u = 0\ , \quad m > 0, \quad b \geq 0$$

в прямоугольной области и в полуполосе. Методами спектрального анализа установлен критерий единственности решения, которое построено в виде суммы ряда Фурье.

В данной работе метод спектральных разложений применен для решения первой граничной задачи для уравнений смешанного типа второго рода в прямоугольной области.

Целью работы является исследование на корректность постановки задачи Дирихле для двух классов уравнений смешанного типа с характеристическим вырождением

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot |y|^m u_{yy} - b^2 u = 0\ , \tag{3}$$

$$Lu \equiv u_{xx} + y u_{yy} + a u_y - b^2 u = 0 \tag{4}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $b \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $m > 0$ и $a > 0$ – заданные числа, в зависимости от значений параметров m и a.

Методы исследования. При обосновании корректности поставленных задач использованы методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, спектрального анализа и аппарат специальных функций.

Научная новизна.

1) Показано, что корректность постановки задачи Дирихле для уравнения смешанного типа со степенным характеристическим вырождением (3) в прямоугольной области существенным образом зависит от показателя степени m вырождения. Установлены промежутки изменения параметра m: $0 < m < 1$, $1 \leq m < 2$, в которых задача Дирихле или видоизмененные задачи поставлены корректно. При $0 < m < 1$ установлен критерий единственности решения задачи Дирихле и решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Когда $1 \le m < 2$ доказаны теоремы единственности и существования решения видоизмененных задач. Решения которых построены в виде суммы рядов и установлены достаточные условия сходимости рядов в соответствующих классах решений уравнения (3).

2) Показано, что корректность постановки задачи Дирихле для уравнения смешанного типа с фиксированным характеристическим вырождением (4) в прямоугольной области существенным образом зависит от коэффициента a. Найдены промежутки изменения параметра a: $0 < a < 1$, $a \ge 1$, в которых задача Дирихле или видоизмененные задачи поставлены корректно. При $0 < a < 1$ установлен критерий единственности решения задачи Дирихле, решение которого построено в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи. В случае $a \ge 1$ доказаны теоремы единственности и существования решения видоизмененных задач. Решения этих задач построены в виде суммы ряда Фурье с обоснованием сходимости рядов в указанных классах решений уравнения (4).

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа.

Апробация работы. Результаты, приведенные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на научных семинарах лаборатории дифференциальных уравнений (науч. рук. – профессор К.Б. Сабитов, 2004 – 2009 гг.), лаборатории физики и астрофизики (науч. рук. – профессор А.И. Филиппов, 2007 – 2009 гг.) Стерлитамакского филиала АН РБ и СГПА, кафедры дифференциальных уравнений (науч. рук. – профессор В.И. Жегалов, 2009 г.) Казанского гос. университета, а также на региональных, всероссийских и международных научных конференциях: «Студенческая наука – в действии» (г. Стерлитамак, 2004 г.), «Современные проблемы физики и математики» (г. Стерлитамак, 2004 г.), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2005 г.), Международной конференции «Тихонов и современная математика» (г. Москва, 2006 г.), «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2007 г.), «Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика» (г. Уфа, 2007 г.), международной конференции «ВЕКУА - 100», (г. Новосибирск, 2007 г.), международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», (г. Москва, 2007 г.), «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы», (г. Стерлитамак, 2008 г.), «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию академика В.А. Садовничего (г. Москва, 2009 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приведен в конце автореферата. В совместных работах [1-4] постановка задач и идея доказательства принадлежат научному руководителю К.Б. Сабитову.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разделенных на 8 параграфов, списка литературы. Объем диссертации составляет 115 страниц. Библиография – 93 наименования.

Основное содержание работы

Во **введении** приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

В **главе 1** для уравнения смешанного типа со степенным характеристическим вырождением (3) в прямоугольной области D в зависимости от значений $m > 0$ поставлены и изучены методом спектрального анализа следующие задачи.

Задача 1.1 (Задача Дирихле). *Пусть* $0 < m < 1$. *Найти в области* D *функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{5}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{6}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \le y \le \beta; \tag{7}$$

$$u(x,\beta) = f(x), \ \ 0 \le x \le 1; \tag{8}$$

$$u(x,-\alpha) = g(x), \ \ 0 \le x \le 1, \tag{9}$$

где f и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$.

Задача 1.2 (Задача E). *Пусть $1 \le m < 2$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (5) – (8).*

Задача 1.3. *Пусть $1 \le m < 2$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (6) – (9) и*

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-);$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{m-1} u_y(x,y) = -\lim_{y\to 0-0} (-y)^{m-1} u_y(x,y), \quad m > 1, \ \ 0 \le x \le 1;$$

$$\lim_{y\to 0+0} \frac{u_y(x,y)}{\ln y} = -\lim_{y\to 0-0} \frac{u_y(x,y)}{\ln(-y)}, \quad m = 1, \ \ 0 \le x \le 1.$$

Методом разделения переменных построены частные решения уравнения (3), которые имеют следующий вид: $u_k(x,y) = X_k(x) Y_k(y)$, где

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin \sqrt{\mu_k} x, \ \ \mu_k = (\pi k)^2, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{10}$$

$$Y_k(y) = \begin{cases} Y_k^+(y) = a_k \sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) + b_k \sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q), \quad y > 0, \\ \\ Y_k^-(y) = c_k \sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q) + d_k \sqrt{-y}\, \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k (-y)^q), \quad y < 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}} (J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q) + J_{-\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)),$$

где $q = (2-m)/2$, a_k, b_k, c_k и d_k – произвольные постоянные, $p_k = \sqrt{b^2 + (\pi k)^2}/q$, $I_{\frac{1}{2q}}(z)$ и $K_{\frac{1}{2q}}(z)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Используя частные решения (10) и (11), решения задач 1.1 – 1.3 построены в виде суммы ряда по системе собственных функций (10) . Например, решение задачи 1.1 найдено в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(y)\sin\pi kx, \tag{12}$$

здесь функции $u_k(y)$ определяется по формулам

$$u_k(y)=\begin{cases}\dfrac{f_k\sqrt{\alpha y}\ \Delta_k(\alpha,y)+g_k\sqrt{\beta y}\ A_k(y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0,\\ \dfrac{f_k\sqrt{-\alpha y}\ B_k(\alpha,-y)+g_k\sqrt{-\beta y}\ \Delta_k(-y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}\ , & y<0\ ,\end{cases} \tag{13}$$

где

$$\Delta_k(\alpha,y)=J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q)+\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q),$$

$$A_k(y,\beta)=I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q)-I_{\frac{1}{2q}}(p_ky^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q),$$

$$B_k(\alpha,-y)=\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)-\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q),$$

$$\Delta_k(-y,\beta)=J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)+\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q),$$

f_k и g_k – коэффициенты разложения функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно по системе $\{\sqrt{2}\sin\pi kx\}$ в пространстве $L_2[0,1]$.

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если существует решение задачи (5) – (9), то оно единственно только тогда, когда при всех $k\in N$*

$$\Delta_k(\alpha,\beta)=J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)+\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)\neq 0. \tag{14}$$

Если при некоторых α, β и $k=l$ нарушено условие (14), то есть $\Delta_l(\alpha,\beta)=0$. Тогда однородная задача (5) – (9) (где $f(x)=g(x)\equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\Delta_l(\alpha,y)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_l\alpha^q)}\sqrt{y}\sin\pi lx, & y>0,\\ \dfrac{\Delta_l(-y,\beta)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_l\beta^q)}\sqrt{-y}\sin\pi lx, & y<0.\end{cases}$$

При доказательстве единственности решения задачи (5) – (9) используется только полнота системы функций (10) в пространстве $L_2[0,1]$. Отметим, что ранее такой метод применялся в работах В.А. Ильина при доказательстве единственности решения первой начально-граничной задачи для уравнений гиперболического типа в цилиндрической области.

Утверждение 2. *Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha_q = \alpha^q/q$ – любое натуральное число; 2) $\alpha_q = s/m$ – любое дробное число, где s и m, 4 и m – взаимно–простые натуральные числа, то существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что при всех $\beta > 0$ и больших k справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\delta_k(\alpha,\beta)| \geq C_0 > 0, \tag{15}$$

где

$$\delta_k(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\frac{K_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}{I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} + \overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q).$$

Утверждение 3. *Пусть $f(x) \in C^3[0,1]$, $g(x) \in C^3[0,1]$, $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0$, $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1) = 0$, $i = 0,2$ и выполнены условия (14) и (15). Тогда задача (5) – (9) однозначно разрешима и это решение определяется рядом (12), где коэффициенты $u_k(y)$ находятся по формулам (13).*

Решение задачи 1.2 построено в виде суммы ряда (12), где функции $u_k(y)$ определяются по формулам

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k}{\beta^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q) y^{\frac{1}{2}}, \quad y > 0, \\ \\ \dfrac{f_k}{\beta^{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)} J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)(-y)^{\frac{1}{2}}, y < 0. \end{cases} \tag{16}$$

Установлена справедливость следующих утверждений.

Утверждение 4. *Если существует решение задачи 1.2, то оно единственно.*

Утверждение 5. *Если $f(x) \in C^3[0,1]$ и выполнены условия $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0$, $i = 0,2$, то задача 1.2 однозначно разрешима. Это решение* *определяется рядом (12), где коэффициенты $u_k(y)$ находятся по формулам (16).*

В случае задачи 1.3 установлены необходимые и достаточные условия единственности решения. При этом само решение построено в виде суммы ряда (12), у которого коэффициенты $u_k(y)$ определяются по формулам

$$u_k(y)=\begin{cases}\dfrac{f_k\sqrt{y}\ I_{\frac{1}{2q}}(p_k y^q)}{\sqrt{\beta} I_{\frac{1}{2q}}(p_k\beta^q)}, & y>0,\\ \dfrac{g_k\sqrt{(-y)}\ J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-y)^q)}{J_{\frac{1}{2q}}(p_k\alpha^q)\sqrt{\alpha}} & y<0\ .\end{cases}$$

Во **второй** главе для уравнения смешанного типа (4) в прямоугольной области $D=\{(x,y)|\ 0<x<1,-\alpha<y<\beta\}$ поставлены и изучены следующие задачи.

Задача 2.1 (Задача Дирихле). *Пусть* $0<a<1$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_+\cup D_-); \tag{17}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^a u_y(x,y)=\lim_{y\to 0-0}(-y)^a u_y(x,y),\ \ 0\le x\le 1; \tag{18}$$

$$Lu(x,y)\equiv 0,\quad (x,y)\in D_+\cup D_-; \tag{19}$$

$$u(0,y)=u(1,y)=0,\quad -\alpha\le y\le\beta; \tag{20}$$

$$u(x,\beta)=f(x),\ \ 0\le x\le 1; \tag{21}$$

$$u(x,-\alpha)=g(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{22}$$

где f и g – заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0)=f(1)=0$, $g(0)=g(1)=0$.

Задача 2.2 (Задача E). *Пусть* $a\ge 1$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям* (17), (19) – (21).

Задача 2.3. *Пусть* $a\ge 1$. *Найти в области* D *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям (19) – (22) и*

$$u(x,y)\in C(\overline{D}\backslash\{y=0\})\cap C^2(D_+\cup D_-); \tag{23}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{a-1}u(x,y)=\lim_{y\to 0-0}(-y)^{a-1}u(x,y),\quad a>1,\ \ 0\le x\le 1, \tag{24}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^a u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^a u_y(x,y), \quad a \ge 1, \;\; 0 \le x \le 1; \tag{25}$$

$$\lim_{y\to 0+0} (\ln y)^{-1} u(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (\ln(-y))^{-1} u(x,y), \quad a = 1, \;\; 0 \le x \le 1.$$

Задача 2.4. *Пусть $a > 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (19) – (24) и*

$$\lim_{y\to 0+0} (y u_y(x,y) + d u(x,y)) = \lim_{y\to 0-0} ((-y) u_y(x,y) - d u(x,y)),$$

где $d = a - 1$.

Методом разделения переменных построены частные решения уравнения (4): $u_k(x,y) = X_k(x) Y_k(y)$, где $X_k(x)$ определяются по формуле (10), а функции $Y_k(y)$ имеют вид

$$Y_k(y) = \begin{cases} Y_k^{+}(y) = a_k y^{\frac{1-a}{2}} I_{|1-a|}(p_k y^{\frac{1}{2}}) + b_k y^{\frac{1-a}{2}} K_{|1-a|}(p_k y^{\frac{1}{2}}), \quad y > 0, \\ Y_k^{-}(y) = c_k (-y)^{\frac{1-a}{2}} J_{|1-a|}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}) + \\ \qquad + d_k (-y)^{\frac{1-a}{2}} Y_{|1-a|}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}), \quad y < 0, \end{cases} \tag{26}$$

где a_k, b_k, c_k и d_k – произвольные постоянные, $p_k^2 = 4(b^2 + \mu_k)$.

Используя частные решения (10) и (26), решения задач 2.1 – 2.4 построены в виде суммы ряда по системе собственных функций (10). Например, решение задачи 2.1 найдено в виде суммы ряда (12), где функции $u_k(y)$ определяется по формулам

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k (\alpha y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(\alpha, y) + g_k (\beta y)^{\frac{1-a}{2}} A_k(y, \beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)(\alpha\beta)^{\frac{1-a}{2}}}, & y > 0, \\ \dfrac{f_k (-\alpha y)^{\frac{1-a}{2}} B_k(\alpha, -y) + g_k (-\beta y)^{\frac{1-a}{2}} \Delta_k(-y, \beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)(\alpha\beta)^{\frac{1-a}{2}}}, & y < 0, \end{cases} \tag{27}$$

где

$$\Delta_k(\alpha,\beta) = J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) + \overline{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) \ne 0, \tag{28}$$

$$\Delta_k(\alpha, y) = J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) K_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) + \overline{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) I_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}),$$

$$A_k(y, \beta) = I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) K_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) - I_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$B_k(\alpha, -y) = \overline{Y}_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}) J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) - \overline{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) J_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}),$$

$$\Delta_k(-y, \beta) = J_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}) K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}) + \overline{Y}_{1-a}(p_k (-y)^{\frac{1}{2}}) I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}}).$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 6. *Если существует решение $u(x, y)$ задачи (17) – (22), то оно единственно только тогда, когда выполнено условие (28) при всех $k \in N$.*

Если при некоторых α, β и $k = l \in N : \Delta_l(\alpha, \beta) = 0$. Тогда однородная задача (17) – (22) (где $f(x) = g(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u_l(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\Delta_l(\alpha, y) y^{\frac{1-a}{2}} \sin \pi l x}{J_{a-1}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}})}, & y > 0, \\ \dfrac{\Delta_l(-y, \beta)(-y)^{\frac{1-a}{2}} \sin \pi l x}{I_{a-1}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})}, & y < 0. \end{cases}$$

Утверждение 7. *Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\widetilde{\alpha} = 2\alpha^{1/2}$ – любое натуральное число; 2) $\widetilde{\alpha} = n/m$ – любое дробное число, где n и m, 4 и m – взаимно–простые натуральные числа то при больших k справедлива оценка*

$$|\sqrt{k}\delta_k(\alpha, \beta)| \geq \widetilde{C}_0 > 0, \tag{29}$$

где

$$\delta_k(\alpha, \beta) = J_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}) \frac{K_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})}{I_{1-a}(p_k \beta^{\frac{1}{2}})} + \overline{Y}_{1-a}(p_k \alpha^{\frac{1}{2}}).$$

Утверждение 8. *Пусть $f(x), g(x) \in C^3[0, 1]$, $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(1) = 0$, $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(1) = 0$, $i = 0, 2$ и выполнены условия (28), (29). Тогда задача (17) – (22) однозначно разрешима и это решение определяется рядом (12), где коэффициенты $u_k(y)$ определяются по формулам (27).*

При исследовании задач 2.3 и 2.4 установлены необходимые и достаточные условия единственности решения. Сами решения построены в виде суммы ряда с обоснованием сходимости в соответствующих классах.

Решение задачи 2.2 также построено в виде суммы ряда. Доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решения.

На защиту выносятся следующие результаты.

1) Установлены промежутки изменения параметра m: $0 < m < 1$, $1 \leq m < 2$, в которых задача Дирихле или видоизмененные задачи для уравнения смешанного типа со степенным характеристическим вырождением (3) в прямоугольной области поставлены корректно. В каждом из этих случаев установлены теоремы единственности и решения задач построено в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи с соответствующим обоснованием сходимости рядов в указанных классах решений данного уравнения.

2) Найдены промежутки изменения параметра a: $0 < a < 1$, $a \geq 1$, в которых задача Дирихле или видоизмененные задачи для уравнения смешанного типа с фиксированным вырождением (4) в прямоугольной области поставлены корректно. В каждом из этих случаев доказаны теоремы единственности решения задач, которые построены в виде суммы ряда Фурье. Установлены достаточные условия сходимости рядов в соответствующих классах решений уравнения (4).

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук, профессору Сабитову Камилю Басировичу за ценные советы и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

1. *Сулейманова, А. Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова // Материалы международной конференции Дифференциальные уравнения и смежные вопросы. Москва: МГУ, – 2007. – С. 265

2. *Сулейманова, А. Х.* О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова // Материалы международной конференции "ВЕКУА - 100". – 2007. – С. 272 – 273.

3. *Сулейманова, А. Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова // Известия вузов. Математика. – 2007. – № 4. – С. 45 – 53.

4. *Сулейманова, А. Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 11. – С. 43 – 53 .

5. *Сулейманова, А. Х.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / А. Х. Сулейманова // Сборник трудов Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» – Самара: "Универс-групп". – 2005. – С. 86 – 87.

6. *Сулейманова, А. Х.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / А. Х. Сулейманова // Материалы международной конференции "Тихонов и современная математика: Функц. анализ и дифференциальные уравнения". Москва: МГУ, – 2006. – С. 270 — 272.

7. *Сулейманова, А. Х.* Нелокальная задача для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области/ А. Х. Сулейманова // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия «Физико-математические и технические науки». – Уфа : Гилем. – 2006. – Выпуск 3. – С. 209 – 219.

8. *Сулейманова, А. Х.* О первой краевой задаче для уравнения смешанного типа в прямоугольнике / А. Х. Сулейманова // Сборник трудов

Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» – Самара: "Универс-групп". – 2007. – С. 139 – 140.

9. *Сулейманова, А. Х.* Критерий единственности решения задачи Дирихле для вырождающегося гиперболического уравнения / А. Х. Сулейманова // Международная математическая конференция "Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика". Уфа. – 2007. – С. 89 – 90 .

10. *Трегубова (Сулейманова), А. Х.* О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в прямоугольной области / А. Х.Трегубова (Сулейманова) // Материалы Международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений посвященной 70-летию академика В.А. Садовничего. – М: Изд-во "Университетская книга". – 2009. – С. 195.

11. *Трегубова (Сулейманова), А. Х.* Первая краевая задача для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области / А. Х.Трегубова (Сулейманова) // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия «Физико-математические и технические науки». – Уфа : Гилем. – 2009. – Выпуск 6. – С. 143 – 155.

Подписано в печать 6.11.2009.
Формат $60 \times 84_{1/16}$.
Гарнитура «Times».
Печать оперативная.
Усл. печ. л. 1.
Тираж 100 экз.
Заказ № /09.

Отпечатано в типографии
Стерлитамакской государственной
педагогической академии:
453103, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 49.